

## 2. IL PROBLEMA DI HISTORY MATCHING

L'obiettivo di uno studio di giacimento è la realizzazione di un modello dinamico, ovvero una rappresentazione numerica del giacimento, allo scopo di formulare previsioni attendibili per quanto riguarda l'evoluzione della produzione nel tempo in funzione delle diverse ipotesi di sviluppo. Le informazioni e la conoscenza del sottosuolo ottenute nell'ambito di differenti discipline, geofisica, sedimentologia, petrofisica e ingegneria petrolifera in senso stretto, solo per citare le principali, vengono integrate nella definizione del modello dinamico del giacimento in termini di geometria, proprietà di conduzione del mezzo poroso, proprietà dei fluidi e di interazione fluido – roccia. Questo consente di definire uno stato iniziale del giacimento, anteriore alla messa in produzione, simulare la storia produttiva fino al tempo dello studio e quindi considerare i futuri scenari di sviluppo.

Il problema del calcolo della risposta di un modello di sistema fisico ad una perturbazione esterna, in questo caso l'attività estrattiva operata dall'uomo, è definito in ambito matematico e ingegneristico come *problema diretto*. Le proprietà del modello indipendenti dalla tipologia di perturbazione simulata sono definite i *parametri* del problema, mentre le proprietà che variano nel tempo vengono chiamate le *variabili* del problema. Naturalmente, come in tutti i problemi di simulazione del comportamento di un sistema fisico, l'incertezza e quindi l'attendibilità delle simulazione, prescindendo da eventuali errori nella definizione del modello matematico, si basano sulla possibilità di assegnare ai parametri valori vicini alla realtà. Nel caso di un giacimento di idrocarburi, localizzato a qualche migliaio di metri di profondità, le informazioni a disposizione consentono di conoscere con un ragionevole dettaglio solo una parte estremamente limitata del giacimento. Senza molto semplificare, possiamo ragionevolmente affermare che nella migliore delle ipotesi abbiamo una conoscenza diretta delle proprietà del mezzo poroso nelle immediate vicinanze dei pozzi, mentre, allontanandoci dai pozzi la nostra conoscenza è caratterizzata da una sempre maggiore incertezza. Tale incertezza ha quindi un chiaro impatto sull'attendibilità delle previsioni che derivano dal modello dinamico del *Reservoir*.

In presenza di una storia produttiva, e quindi di misure relative alle produzioni di fluidi e alle pressioni raccolte ai pozzi nel corso del tempo, la capacità del modello di simulare correttamente il passato noto rappresenta un requisito fondamentale affinché i profili di produzione elaborati possano essere considerati attendibili.

Il processo che porta alla convalida del modello dinamico attraverso l'accordo tra i risultati della simulazione numerica e i dati di produzione è detto *History Matching*. In tale fase il modello dinamico viene utilizzato allo scopo di riprodurre la storia passata, confrontando quindi il risultato del calcolo con i dati raccolti ai pozzi. L'obiettivo è di ottenere, attraverso opportune modifiche dei parametri, un modello di giacimento coerente con i dati di produzione noti. Se il problema della previsione del comportamento del *Reservoir* nei confronti di una perturbazione esterna è stato indicato con il termine di *problema diretto*, la determinazione di parametri che consentano di riprodurre il comportamento reale, fissate nel tempo le condizioni operative, può essere definito un *problema inverso*. L'*History Matching*, ovvero la soluzione del problema inverso così formulato, rappresenta il momento chiave dello studio di giacimento, sia per il suo impatto sulle previsioni che per quanto riguarda le risorse, in termini di tempo uomo e tempo – macchina, ad esso dedicate.

Le maggiori difficoltà nascono dalla natura stessa del problema inverso, ovvero dalla dipendenza della risposta del sistema dai parametri di modello. In generale, la relazione risposta – parametri, definita attraverso la simulazione numerica, ovvero la soluzione di un problema diretto, è non lineare. Conseguentemente il problema inverso è a priori *mal condizionato*, ovvero più configurazioni dei parametri sono in grado di dare risposte molto vicine, di fatto equivalenti. Inoltre la definizione stessa di una parametrizzazione su cui operare la ricerca di una soluzione del problema inverso rappresenta essa stessa un problema, la cui difficoltà è forse maggiore della stessa determinazione del valore ottimale dei parametri.

In questa tesi ci soffermeremo, prescindendo dalle questioni di parametrizzazione, sugli aspetti del problema di *History Matching* indotti dall'esistenza di una dipendenza di tipo non lineare risposta – parametri. Definiremo allora da un punto di vista matematico il problema inverso in questione, formulando quindi per una fissata parametrizzazione un problema di minimo per una funzione oggetto, misura della qualità della calibrazione, per la cui soluzione sono disponibili una serie di tecniche matematiche. Evidenzieremo

quindi il limiti delle tecniche più usate, sia per quanto riguarda i software commerciali che per quanto riguarda i prodotti di ricerca con caratteristiche più prototipali.

## ***2.1. Definizione del Problema***

La costruzione del modello dinamico, per quanto accurata, dà comunque luogo ad una rappresentazione molto approssimata della realtà del *Reservoir*, con un conseguente effetto sull'attendibilità delle previsioni che si possono ottenere attraverso la simulazione numerica. La definizione di geometria e proprietà di conduzione del mezzo poroso è caratterizzata necessariamente da una diffusa aleatorietà, minore ai pozzi e crescente man mano ci allontaniamo dalla zona dei pozzi.

L'esistenza di una storia produttiva, e quindi di dati sulle portate di fluidi prodotti e sulle pressione ai pozzi, rappresenta allora un'informazione sul comportamento dei fluidi e quindi, implicitamente, sulle proprietà del mezzo poroso. L'*History Matching* rappresenta la fase di integrazione dei dati di produzione nella definizione del modello dinamico, allo scopo di ottenere una rappresentazione del *Reservoir* coerente con quanto emerso in seguito alle attività produttive.

Durante l'*History Matching*, il modello viene utilizzato per simulare la storia produttiva. Per prima cosa il sistema viene inizializzato, ovvero vengono riprodotte le distribuzioni dei fluidi prima della produzione. Il modello simula quindi tutta la storia produttiva, definendo per ogni pozzo le opportune condizioni operative in relazione ai dati disponibili. Nel caso di pozzi storicamente considerati produttori, di gas o olio, nel modello vengono stabilite le portate a condizioni di superficie (CS) dell'idrocarburo principale prodotto, gas o olio rispettivamente, sulla base dalle produzioni medie mensili effettive. Per i pozzi iniettori vengono fissate le portate a CS dei fluidi iniettati, gas o acqua. Queste condizioni operative rappresentano i vincoli imposti sul sistema, mentre variabili del problema quali il rapporto gas – olio (*GOR*) e il rapporto acqua – liquido (*WCUT*) in pozzi produttori di olio, oppure pressioni di cella e di fondo pozzo, possono essere confrontate con i corrispondenti dati di produzione.

Il confronto può essere opportunamente condotto attraverso la definizione di una funzione oggetto, che sintetizzi in un unico numero lo scarto fra i dati calcolati e

CAPITOLO 2

osservati. Nel caso in cui l'accordo fra il calcolo e l'osservazione non sia soddisfacente, ovvero il valore della funzione oggetto sia troppo elevato, il modello viene modificato agendo su un opportuno insieme di parametri. La scelta di questi parametri e l'entità delle relative modifiche sono definite attraverso un procedimento per tentativi in cui il fattore umano, ovvero l'esperienza di chi conduce lo studio, gioca un ruolo determinante.

Nei modelli di simulazione numerica, le variabili che caratterizzano le proprietà dei fluidi sono solitamente considerate fissate o comunque calcolabili, grazie ad esperienze di laboratorio, con una precisione arbitrariamente elevata. Dunque non vengono prese in considerazione quali vere e proprie incognite nel processo di *History Matching*. Viceversa, le caratteristiche petrofisiche del giacimento (porosità, permeabilità assolute), la geometria del *Reservoir*, nonché le interazioni roccia – fluidi, sono caratterizzate da una intrinseca incertezza, in particolare nelle regioni meno coperte dai pozzi. Queste rende tali proprietà del modello, che possiamo definire *statiche* in quanto ragionevolmente non cambiano nel tempo, i migliori candidati per la definizione dei parametri su cui operare la calibrazione. Tuttavia, le proprietà statiche sono definite per ogni cella del modello discretizzato, e questo porta due problemi in primo piano. Vi è innanzitutto un'impossibilità pratica nel gestire tutte le proprietà statiche come parametri del modello, dato l'elevato numero di celle in cui un giacimento è discretizzato. In secondo luogo, è possibile riscontrare problemi di indeterminazione matematica quando si utilizza un numero di variabili così elevato: è necessario che il numero di dati osservati sia sempre superiore, o tutt'al più uguale, al numero di incognite (parametri) del problema. In caso contrario, il problema è indeterminato e non ha senso fisico tentare di risolverlo.

Inoltre, nonostante si scelga accuratamente un set di parametri rappresentativo per l'intero giacimento, il cui numero di variabili è inferiore ai dati osservati, l'*History Matching* rappresenta un problema matematico di ottimizzazione multidimensionale, caratterizzato da una funzione obiettivo estremamente complessa, non lineare e, nella stragrande maggioranza dei casi, non convessa. L'insieme di tutti questi fattori fa sì che l'unicità della soluzione al problema venga meno: si ottiene cioè una funzione obiettivo multimodale, così definita poiché presenta un numero elevato, in genere ignoto, di minimi locali isolati. È dunque buona pratica utilizzare dei metodi di ottimizzazione matematica che permettano di localizzare più minimi della funzione oggetto.

L'obiettivo di questa tesi è, appunto, l'analisi delle prestazioni di uno di questi metodi, l'algoritmo di *Tunneling*, che è in grado di fornire più di un punto stazionario della funzione obiettivo: questa possibilità permette all'ingegnere di valutare diversi scenari di produzione. Infatti, ogni minimo locale è caratterizzato da un set di parametri differente dagli altri, nonché da un valore diverso della funzione obiettivo. Prendendo in considerazione tutti i punti stazionari per cui la funzione oggetto ha un valore relativamente piccolo (ciò indica un buon accordo tra i dati osservati e i parametri calcolati), l'ingegnere ha a disposizione più set di parametri e quindi diversi scenari di produzione possibili. Ciò è estremamente importante, dato che è possibile interpretare e prevedere il comportamento futuro del giacimento (*Forecast*) da più angolazioni, nonché fornire un quadro più completo ed esauriente delle possibilità di produzione future del *Reservoir*.

### 2.1.1. LA FUNZIONE OBIETTIVO

La calibrazione del modello numerico è sempre interpretata come un problema matematico di minimizzazione di una funzione obiettivo, definita come misura dello scarto fra i dati osservati  $\mathbf{y}^{obs}$  e calcolati  $\mathbf{y}^{sim}$ , dipendente implicitamente dai parametri petrofisici nonché dalla geometria del giacimento. Tra le molteplici scelte possibili per il calcolo di questo scarto, tradizionalmente si utilizza una funzione obiettivo ai minimi quadrati pesati:

$$\mathcal{O} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{dati}} \sum_{j=1}^{N_{pozzi}} \sum_{k=1}^{N_{prop}} \left[ \omega_{i,j,k} \frac{(y_{i,j,k}^{sim} - y_{i,j,k}^{obs})}{\sigma_{i,j,k}} \right]^2 \quad [2.1]$$

Dove  $\mathbf{y}^{sim}, \mathbf{y}^{obs}$  sono rispettivamente i valori calcolati e misurati della variabile  $\mathbf{y}$ ,  $\sigma$  l'errore nella determinazione delle quantità misurate,  $\omega$  il peso della misura,  $N_{prop}$  il numero di proprietà di *History Matching* (WGOR, WWCT, WBHP),  $N_{pozzi}$  il numero di pozzi presenti nel giacimento,  $N_{dati}$  il numero di dati osservati e  $i, j, k$ , rispettivamente, gli indici del dato osservato, del pozzo e del tipo di proprietà.

Possiamo definire  $\chi$  il vettore dei parametri che caratterizzano il *Reservoir*: le grandezze simulate  $\mathbf{y}^{sim}$  dipendono da  $\chi$ , cioè  $\mathbf{y}^{sim} = \mathbf{y}^{sim}(\chi)$ . Dunque, anche la funzione obiettivo dipende da queste variabili: l'*History Matching* si riduce allora alla soluzione del problema ai minimi quadrati definito da:

$$\min_{\chi_{min} \leq \chi \leq \chi_{max}} \mathcal{O}(\chi) = \min_{\chi_{min} \leq \chi \leq \chi_{max}} \left\{ \sum_{i=1}^{N_{dati}} \sum_{j=1}^{N_{pozzi}} \sum_{k=1}^{N_{prp}} \left[ \omega_{i,j,k} \frac{\left( y_{i,j,k}^{sim}(\chi) - y_{i,j,k}^{obs} \right)^2}{\sigma_{i,j,k}} \right] \right\} \quad [2.2]$$

L'impostazione della calibrazione del modello dinamico come problema ai minimi quadrati [23], conseguente alla scelta di una funzione obiettivo della forma [2.1], può essere giustificata assumendo ogni misura  $y_{i,j,k}^{obs}$  come il risultato di un campionamento casuale di una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana di media  $y_{i,j,k}^m$  incognita e varianza  $\sigma_{i,j,k}^2$ . La probabilità dell'insieme delle misure è quindi il prodotto delle probabilità individuali, cioè:

$$P \propto \prod_{i=1}^{N_{dati}} \prod_{j=1}^{N_{pozzi}} \prod_{k=1}^{N_{prp}} \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{y_{i,j,k}^{obs} - y_{i,j,k}^m}{\sigma_{i,j,k}} \right)^2 \right] \right\} \quad [2.3]$$

Massimizzare la precedente espressione equivale a massimizzare il suo logaritmo, o minimizzare il suo opposto, vale a dire la funzione obiettivo:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{dati}} \sum_{j=1}^{N_{pozzi}} \sum_{k=1}^{N_{prp}} \left[ \frac{\left( y_{i,j,k}^{obs} - y_{i,j,k}^m \right)^2}{\sigma_{i,j,k}} \right] \quad [2.4]$$

che è chiaramente del tipo [2.1].

## 2.2. *L'History Matching Come Problema Inverso*

Prescindendo per ora dalle tecniche di soluzione, quanto scritto consente di considerare l'*History Matching* di un modello di giacimento come la soluzione di un problema inverso, ovvero la determinazione dei parametri di un modello di sistema fisico attraverso la simulazione, problema diretto, del suo comportamento.

Inoltre, da un punto di vista matematico, per una fissata parametrizzazione il problema inverso diventa un problema di minimo per la funzione oggetto che misura la bontà della calibrazione. La valutazione della funzione da minimizzare corrisponde alla soluzione del problema diretto, ovvero alla simulazione numerica della storia produttiva. È possibile quindi applicare a tale problema le tecniche di risoluzione numerica sviluppate nell'ambito dell'ottimizzazione matematica. Queste tecniche possono essere classificate in due categorie:

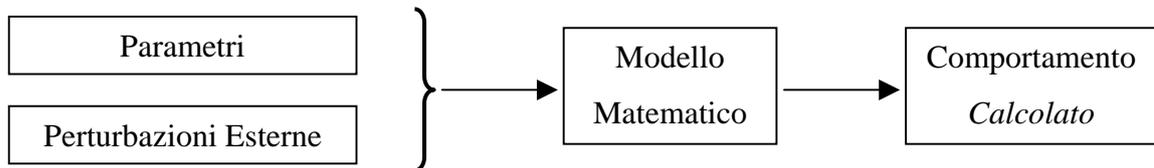
- ✓ *Metodi Locali*: consentono di approssimare rapidamente, ovvero attraverso un numero limitato di valutazioni della funzione oggetto, un minimo della funzione considerata. Queste tecniche si basano in genere sulla possibilità di calcolare i gradienti della funzione obiettivo. Nel caso di problemi convessi, ogni minimo locale rappresenta un minimo globale [26];
- ✓ *Metodi Globali*: puntano alla ricerca del minimo assoluto, evitando i bacini di attrazione di minimi locali, al prezzo però di un numero di valutazioni della funzione dell'ordine delle migliaia anche per semplici funzioni analitiche. Contrariamente ai metodi locali, queste tecniche non richiedono, in genere, il calcolo delle derivate della funzione oggetto.

Poiché i tempi di calcolo nella soluzione del problema diretto, ovvero nella valutazione della funzione oggetto, sono generalmente un collo di bottiglia per quanto riguarda la durata complessiva del flusso di lavoro dedicato all'*History Matching*, le tecniche numeriche più utilizzate, in particolare nei software commerciali, sono di tipo locale. L'utilizzo di tali metodi ha richiesto l'implementazione di opportune tecniche per

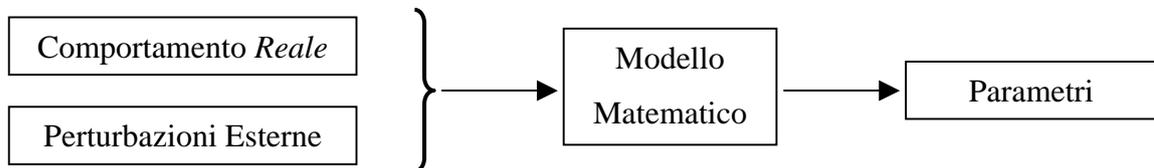
il calcolo delle derivate della funzione oggetto  $\partial \mathcal{O}(\chi)/\partial \chi$ . In particolare l'approccio utilizzato dai software commerciali di simulazione si basa sul calcolo, nel corso della soluzione del problema diretto, della matrice di sensitività del problema  $\partial y_i^{sim}/\partial \chi_j$  (si veda la [2.2] e l'Appendice B).

La scelta di utilizzare un metodo locale può però rappresentare una limitazione quando consideriamo la natura dell'*History Matching* come problema inverso. La dipendenza della risposta dinamica del modello di *Reservoir* da un insieme di parametri non è affatto lineare, se non per pochi casi limite. La funzione oggetto, conseguentemente, è generalmente non convessa e quindi l'utilizzo di metodi locali può portare la calibrazione lontano dal minimo globale. D'altra parte non è ragionevole pensare di utilizzare metodi globali, quando questi possono richiedere decine di migliaia di valutazioni della funzione oggetto. Nasce quindi l'interesse, oggetto di questa tesi, per metodi con caratteristiche ibride, ovvero in grado andare oltre i limiti dei metodi locali senza pagare un prezzo troppo alto in termini di valutazione della funzione oggetto.

*Problema Diretto*



*Problema Inverso*



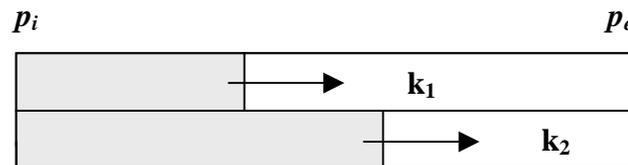
**Figura 2-1. Problema Diretto e Inverso**

Una volta definito il problema matematico, il tipo di funzione oggetto e scelto il metodo di ottimizzazione desiderato, il processo di inversione del problema diretto è esprimibile secondo il diagramma di flusso della figura 2-1.

### 2.2.1. NON LINEARITÀ

Considerando l'*History Matching* come problema inverso, è necessario chiarire cosa si intende per non linearità del problema quando si tenta incorporare i dati di produzione nel modello. Risulta generalmente impossibile trovare una relazione lineare tra dati di produzione e permeabilità, ad esempio, sia nel caso di flusso monofase o multifase, sia utilizzando trasformazioni non lineari dei parametri.

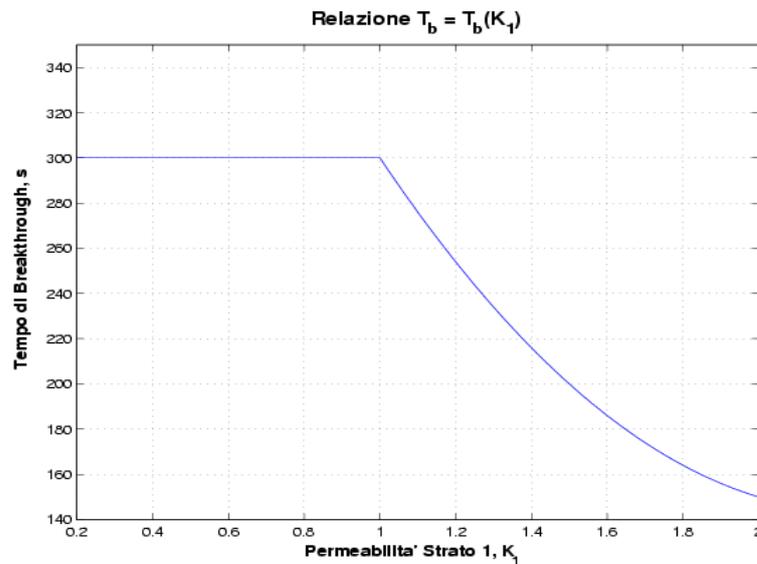
Consideriamo, ad esempio, un semplice problema inverso a due parametri, rappresentato nella figura 2-2.



**Figura 2-2. Caso Semplice di Problema Inverso a Due Parametri**

La figura 2-2 rappresenta un problema di flusso d'acqua su due livelli con diversa permeabilità; i due livelli non sono comunicanti e non vi è dunque flusso tra essi. Questo problema può essere facilmente analizzato utilizzando la teoria, più semplice dal punto di vista matematico, di Buckley – Leverett [6]. Inoltre, in modo schematico, questo caso può essere visto come una versione semplificata dell'iniezione di acqua in un giacimento in cui sono presenti due o più livelli. I dati misurati sono il tempo necessario all'acqua per raggiungere l'estremità dei due canali (tempo di *breakthrough*) e il flusso d'acqua per

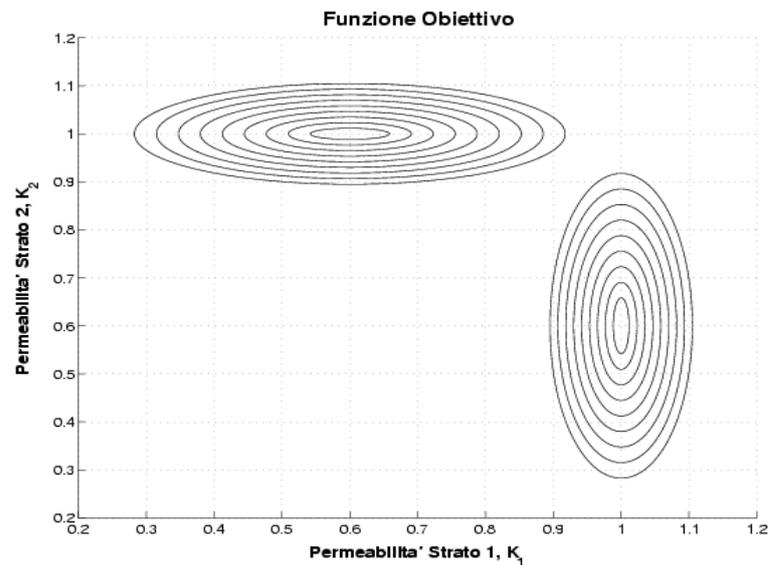
una caduta di pressione fissata  $p_i - p_e$ . Se  $k_1$  è la permeabilità dello strato caratterizzato dal tempo di *breakthrough* più elevato, chiaramente la relazione tra quest'ultima variabile e  $k_1$  è di tipo non lineare; inoltre, se  $k_1 < k_2$ , qualunque valore di  $k_1$  non ha alcuna influenza sul tempo di arrivo dell'acqua all'altra estremità. Dunque la relazione tra tempo di *breakthrough* e  $k_1$  può essere visualizzata nella figura 2-3.



**Figura 2-3. Relazione Non Lineare tra  $T_b$  e  $k_1$**

A causa di questa non linearità, la funzione oggetto in questione risulta essere multimodale (bimodale per l'esattezza), cioè presenta due minimi distinti, i cui picchi rappresentati in figura 2-4 corrispondono ai valori delle due permeabilità che concordano esattamente con i dati osservati [22]. Infatti, considerando il tempo di arrivo dell'acqua come funzione di  $k_1$  e  $k_2$ , è possibile dimostrare che, fissato un tempo di *breakthrough* ottimale, per ogni soluzione  $(k_a, k_b)$  che soddisfa il problema di ottimizzazione della funzione oggetto esiste una soluzione simmetrica  $(k_b, k_a)$  con le stesse caratteristiche. Ciò è dovuto essenzialmente alla simmetria del problema, secondo il quale i due livelli sono esattamente identici. La simmetria, insieme alla non linearità della funzione

obiettivo, assicura la presenza di due minimi locali simmetrici nel valore dei parametri di ottimizzazione.



**Figura 2-4. Funzione Obiettivo del Problema a Due Parametri**

Come si nota, dunque, la non linearità influenza la possibilità di calcolare il minimo assoluto della funzione oggetto; pur utilizzando tecniche di regolarizzazione, il problema di integrare i dati di produzione nel modello può generare un gran numero di minimi locali isolati, e quindi rendere molto più arduo, nonché costoso in termini di tempo – macchina, il processo di *History Matching*.

### 2.3. Parametrizzazione del Giacimento: la Zonazione

Un giacimento è discretizzato in un certo numero di celle all'interno delle quali occorre definire il valore delle variabili. L'*History Matching* consiste nel modificare il valore di alcune variabili all'interno di determinate celle per far sì che il risultato fornito dal modello sia il più possibile prossimo al comportamento reale del giacimento.

Assumendo come ipotesi di lavoro che le proprietà dei fluidi siano misurabili con precisione arbitrariamente elevata, il numero di variabili che è possibile considerare nel processo di *History Matching* è comunque proporzionale al numero di celle in cui è discretizzato il giacimento: questa conclusione risulta essere intrattabile da un punto di vista numerico e di tempo di calcolo nei simulatori. Inoltre, considerando un numero di variabili così elevato, il problema matematico di minimizzazione della funzione oggetto diviene indeterminato, in quanto non si dispone di una quantità di dati osservati di tale portata.

Per queste ragioni si assume che i valori delle variabili nelle celle siano correlati e, quindi, possano essere raggruppati insieme in zone: da qui appunto il termine *zonazione*. All'interno di ognuna di esse è possibile attribuire lo stesso valore di una determinata variabile ad ogni cella. Nonostante questa semplificazione, il problema rimane estremamente arduo, ed è compito dell'ingegnere selezionare un set limitato di variabili tra tutte quelle possibili. Questo set deve essere rappresentativo e caratterizzare in modo adeguato il giacimento durante il processo di *History Matching*. La definizione di questo gruppo di parametri è il risultato di studi geologici e petrofisici del giacimento e di simulazioni per prove ed errori; l'esperienza dell'ingegnere gioca un ruolo fondamentale in questo caso.

La parametrizzazione è parte essenziale del problema. Definire un parametro significa quindi specificare il tipo di variabile di giacimento e l'insieme di celle in cui essa deve essere modificata per migliorare il modello.